IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades recíprocas

$cscx = \frac{1}{senx}$ $secx = \frac{1}{\cos\ x}$ $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

Identidades cociente

$\tan x = \frac{senx}{cosx}$ $\cot x = \frac{cosx}{senx}$

Identidades de negativos

$\sec(-x) = -senx$ $\cos(-x) = cosx$ $\tan(-x) = -tanx$

Identidades pitagóricas

$sen^2x + cos^2x = 1$ $tan^2x + 1 = sec^2x$ $cot^2x + 1 = csc^2x$

Identidades para suma

$sen(x + y) = sen\,x \cos y + \cos x\ sen\,y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - sen\,x\ sen\,y$

$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

Identidades para diferencia

$sen(x - y) = sen\,x \cos y - \cos x\ sen\,y$

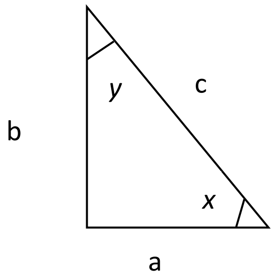
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + sen\,x\ sen\,y$

$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Identidades para cofunciones

Las razones trigonométricas de todo ángulo agudo son respectivamente iguales a las co-razones trigonométricas de su ángulo complementario.

Teniendo un triángulo rectángulo con un ángulo agudo “x” y el otro “y” 8261038603



$$y = \frac{\pi}{2} - x$$

Las cofunciones se dan entre

Seno-coseno
Tangente-cotangente
Secante-cosecante

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen\, x$$

$$tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

$$sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x \qquad csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$$

Identidades para el producto-suma

$sen\, x \cos y = \frac{1}{2}[sen(x+y)+sen(x-y)]$

Sumamos:

$$\begin{array}{r} sen\, x \cos y + \cos x\, sen\, y = sen(x+y) \quad + \\ sen\, x\, cos\, y - \cos x\, sen\, y = sen\,(x-y) \\ \hline 2\, sen\, x \cos y = sen(x+y) + sen(x-y) \end{array}$$

$$\therefore \boldsymbol{sen\, x \cos y = \frac{1}{2}[sen(x+y) + sen(x-y)]}$$

$\cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[sen(x+y)-sen(x-y)]$

Restamos:

$$\begin{array}{r} sen\, x\, cos\, y + \cos x\, sen\, y = sen(x+y) \quad - \\ sen\, x \cos y - \cos x\, sen\, y = sen(x-y) \\ \hline 2 \cos x\, sen\, y = sen(x+y) - sen(x-y) \end{array}$$

$$\therefore \boldsymbol{\cos x\, sen\, y = \frac{1}{2}[sen(x+y) - sen(x-y)]}$$

$sen\, x\, \text{sen}\, y = \frac{1}{2}[cos(x-y) - cos(x+y)]$

Restamos:

$$\begin{array}{c} cos\, x\, cos\, y + \text{sen}\, x\, sen\, y = cos(x-y) \\ cos\, x\, \cos y - \text{sen}\, x\, sen\, y = cos(x+y) \quad - \\ \hline 2\, \text{sen}\, x\, sen\, y = cos(x-y) - cos(x+y) \end{array}$$

$$\therefore \mathbf{sen\, x\, sen\, y = \frac{1}{2}[cos(x-y) - cos(x+y)]}$$

$cos\, x\, \cos y = \frac{1}{2}[cos(x+y) + cos(x-y)]$

Sumamos:

$$\begin{array}{c} cos\, x\, cos\, y + \text{sen}\, x\, sen\, y = cos(x-y) \\ cos\, x\, \cos y - \text{sen}\, x\, sen\, y = cos(x+y) \quad + \\ \hline 2\cos x\, cos\, y = cos(x-y) + cos(x+y) \end{array}$$

$$\therefore \mathbf{cos\, x\, cos\, y = \frac{1}{2}[cos(x+y) + cos(x-y)]}$$

Identidades para la suma-producto

$sen\, x + sen\, y = 2\, sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Sustituimos “x” por $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ y “y” por$\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$sen\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] + sen\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] = 2\, sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\, cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$sen\left(\frac{2x}{2}\right) + sen\left(\frac{2y}{2}\right) = 2\, sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\therefore \mathbf{sen\, x + sen\, y \equiv 2\, sen\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$sen\, x - sen\, y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Sea: $sen(x+y) - sen(x-y) = 2\cos x\, sen\, y$

Sustituimos “x” por $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ $y\ "y"\ por$ $\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$sen\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] - sen\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] = 2\, cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\, sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$sen\left(\frac{2x}{2}\right) - sen\left(\frac{2y}{2}\right) = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{sen\ x - sen\ y \equiv 2\ cos\left(\frac{x+y}{2}\right) sen\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$cos\ x + cos\ y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Sea: $\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cos y$

Sustituimos "x" por $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ y "y" por $\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$cos\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] + cos\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$cos\left(\frac{2x}{2}\right) + cos\left(\frac{2y}{2}\right) = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{cos\ x + cos\ y \equiv 2\ cos\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$cos\ x - cos\ y = -2\ sen\left(\frac{x+y}{2}\right) sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Sea: $cos\ x\ cos\ y - \text{sen}\,x\ sen\ y = cos(x+y)$ **−**

$cos\ x \cos y + \text{sen}\,x\ sen\ y = cos(x-y)$

$-\,2\ sen\ x\ sen\ y = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Sustituimos "x" por $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ y "y" por $\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$cos\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] - cos\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] = -2\,\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$cos\left(\frac{2x}{2}\right) - cos\left(\frac{2y}{2}\right) = -2\ sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{\cos x - cos\ y = -2\ sen\left(\frac{x+y}{2}\right) sen\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

Identidades para ángulos dobles

$sen\ 2x = 2\ sen\ x \cos x$

$$sen(x + x) = sen\ x \cos x + \cos x\ sen\ x$$

$$sen\ 2\ x = 2(sen\ x \cos x)$$

$$\therefore \boldsymbol{sen\ 2\ x = 2\ sen\ x \cos x}$$

$\cos 2x = \begin{cases} cos^2 x - sen^2 x \\ 1 - 2\ sen^2\ x \\ 2\ cos^2\ x - 1 \end{cases}$

$$\cos(x + x) = \cos x \cos x - sen\ x\ senx$$

$$\therefore \boldsymbol{\cos 2\ x = cos^2 x - sen^2 x}$$

$$cos\ 2\ x = 1 -\ sen^2\ x - sen^2\ x$$

$$\therefore \boldsymbol{cos\ 2\ x = 1 - 2\ sen^2\ x}$$

$$\cos 2\ x = cos^2\ x - (1 - cos^2\ x)$$

$$\cos 2\ x = cos^2\ x - 1 + cos^2\ x$$

$$\therefore \boldsymbol{cos\ 2\ x = 2\ cos^2\ x - 1}$$

$\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - tan^2\ x} = \dfrac{2 \cot x}{cot^2\ x - 1} = \dfrac{2}{\cot x - \tan x}$

$$\tan(x + x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x}$$

$$\boldsymbol{\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - tan^2\ x}}$$

$$tan\ 2x = \frac{\frac{2}{cot\ x}}{\frac{cot^2\ x}{cot^2\ x} - \frac{1}{cot^2\ x}}$$

$$\tan 2\ x = \frac{\frac{2}{\cot x}}{\frac{cot^2\ x - 1}{cot^2\ x}}$$

$$\tan 2x = \frac{2\, cot^2\, x}{\cot x(cot^2\, x - 1)}$$

$$\mathbf{\tan 2\, x = \frac{2 \cot x}{cot^2\, x - 1}}$$

$$tan\ 2x = \frac{2\ cot\ x}{cot\ x\left(cot\ x - \frac{1}{cot\ x}\right)}$$

$$tan\ 2x = \frac{2}{cot\ x - \frac{1}{cot\ x}}$$

$$\boldsymbol{tan\ 2x = \frac{2}{\cot x - \tan x}}$$

Identidades para semiángulos

$$sen\frac{x}{2} = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos x}}{2}$$

Sustituir "x" por $\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\cos 2x = \ cos^2 x - \ sen^2 x$$

$$1 = \ cos^2 x + \ sen^2 x$$

−

$$\cos 2x - 1 = -2\ sen^2 x$$

$$2\ sen^2 x = 1 - \cos 2\, x$$

$$2\ sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\boldsymbol{sen\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos x}}{2}}$$

$cos\frac{x}{2} = \frac{\pm\sqrt{1+\cos x}}{2}$

Sumamos las siguientes identidades

$$cos^2x + \ sen^2 = 1$$

$$cos^2x - \ sen^2 = \cos 2x$$

$$2\ cos^2x = 1 + \cos 2x$$

$$cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

Siendo eso sustituimos "x" por $\left(\frac{x}{2}\right)$

$$cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}}$$

$$\boldsymbol{cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}$$

$tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{sen\ x} = \frac{sen\ x}{1+\cos x} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Sea: $\tan x = \frac{sen\ x}{\cos x}$

Sustituir "x" por $\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\tan(\frac{x}{2}) = \frac{sen\ \left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}$$

$$\mathbf{tan}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right) = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1 - cos}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{1 + cos}\,\boldsymbol{x}}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $1 - \cos x$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}\right)\left(\frac{1 - cos\ x}{1 - cos\ x}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1 - cos\ x)^2}{1 - \ cos^2\ x}}$$

$$\boldsymbol{tan}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{cos\ x}}{\boldsymbol{sen\ x}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $1 + cos\ x$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}\right)\left(\frac{1 + cos\ x}{1 + cos\ x}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \ cos^2\ x}{(1 + \cos x)^2}}$$

$$\therefore \mathbf{tan}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\boldsymbol{sen\ x}}{\mathbf{1 + cos}\,\boldsymbol{x}}$$

$sen^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $tan^2x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$